ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KHẮC HƯỞNG

TIÊU CHUẨN EISENSTEIN VỀ TÍNH BẤT KHẢ QUY CỦA ĐA THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN KHẮC HƯỞNG

TIÊU CHUẨN EISENSTEIN VỀ TÍNH BẤT KHẢ QUY CỦA ĐA THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
GS.TS. Lê Thị Thanh Nhàn

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

LỜI CẢM ƠN

Luận văn “Tiêu chuẩn Eisenstein về tính bất khả quy của đa thức” được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình. Cô đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và tận tình giải đáp những thắc mắc của tác giả trong suốt quá trình làm luận văn. Luận văn của tôi được hoàn thành cũng nhờ sự đôn đốc nhắc nhở và hướng dẫn nhiệt tình của cô.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban Chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, cùng các thầy, cô đã tham gia giảng dạy, đã tạo điều kiện tốt nhất để tác giả học tập và nghiên cứu.

Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu và các đồng nghiệp Trường THPT Quế Võ số 2 - Bắc Ninh đã tạo điều kiện cho tôi hoàn thành tốt nhiệm vụ học tập của mình.

Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp cao học Toán K10C (khóa 2016 - 2018), cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình học tập.

Tôi xin trân trọng cảm ơn!

Lời nói đầu

Trong các kì thi học sinh giỏi cấp quốc gia, quốc tế, các kì thi Olympic toán sinh viên giữa các trường đại học thì các bài toán liên quan đến đa thức thường xuyên được đề cập và được xem như là những bài toán khó. Trong lý thuyết đa thức thì đa thức bất khả quy đóng một vai trò quan trọng giống như vai trò của số nguyên tố trong tập các số nguyên. Các bài toán về xét tính bất khả quy của các đa thức trên các trường số $\mathbb{C}$ và $\mathbb{R}$ đã được giải quyết từ khi người ta chứng minh được Định lý cơ bản của Đại số và chứng minh hoàn chỉnh này được đưa ra bởi Gauss năm 1816. Nhưng các bài toán về tính bất khả quy của các đa thức trên $\mathbb{Q}$ vẫn đang thử thách các nhà toán học thế giới. Với các lý do trên, tôi đã chọn đề tài "Tiêu chuẩn Eisenstein" về tính bất khả quy của đa thức trên $\mathbb{Q}$.

Mục đích của luận văn là trình bày lại một số kết quả gần đây về những mở rộng của tiêu chuẩn Eisenstein cho tính bất khả quy của đa thức. Tiêu chuẩn Eisenstein phát biểu rằng, nếu $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ là đa thức với hệ số nguyên sao cho có một số nguyên tố p thỏa mãn p là ước của a_i với mọi $i < n$, p không là ước của a_n và p^2 không là ước của a_0, thì $f(x)$ bất khả quy trên trường hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Luận văn nghiên cứu đến các vấn đề sau đây:

- **Vấn đề 1**. Mở rộng tiêu chuẩn Eisenstein cho trường hợp số nguyên tố p không là ước của một hệ số a_k với k là một số tự nhiên tùy ý không nhất thiết bằng n và p^2 không là ước của a_t với t tùy ý không nhất thiết bằng 0 (dựa theo tài liệu [1], [4] và [5]);

- **Vấn đề 2**. Mở rộng tiêu chuẩn Eisenstein cho trường hợp hệ số của đa thức thuộc một miền phân tích duy nhất tùy ý (không nhất thiết là miền $\mathbb{Z}$ các số nguyên). Từ đó xét tính bất khả quy của đa thức nhiều biến (dựa theo tài liệu [6]);

- **Vấn đề 3**. Trình bày lịch sử phát hiện và chứng minh Tiêu chuẩn Eisenstein (dựa theo tài liệu [3]).

Luận văn gồm hai chương. Trong Chương 1, chúng tôi nhắc lại khái niệm đa thức bất khả quy, Tiêu chuẩn Eisenstein và lịch sử phát hiện và chứng minh Tiêu chuẩn Eisenstein. Chương 2 là nội dung chính của luận văn, nêu một số mở rộng của tiêu chuẩn Eisenstein. Tiết đầu dành để mở rộng cho trường hợp đa thức với hệ số nguyên. Tiết 2.2 trình bày các khái niệm về miền phân tích duy nhất, chuẩn bị cho việc mở rộng tiêu chuẩn với trường hợp đa thức với hệ số trên miền UFD. Tiết cuối trình bày vận dụng các mở rộng trên để xét tính bất khả quy của đa thức.

Nội dung nghiên cứu chưa được tiếp cận ở bậc phổ thông và đại học, nhưng gắn liền với toán sơ cấp.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2018

Tác giả

Nguyễn Khắc Hưởng

Chương 1

Tiêu chuẩn Eisenstein

Mục tiêu của Chương 1 là trình bày về đa thức bất khả quy và Tiêu chuẩn Eisenstein. Trong tiết đầu của chương chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về đa thức bất khả quy và một số phương pháp chứng minh đa thức bất khả quy. Tiết tiếp theo dành để trình bày Tiêu chuẩn Eisenstein. Trong phần cuối chương chúng tôi trình bày lịch sử phát hiện cùng các chứng minh Tiêu chuẩn Eisenstein.

1.1 Đa thức bất khả quy

Đa thức bất khả quy đóng một vai trò quan trọng giống như vai trò của số nguyên tố trong vành $\mathbb{Z}$ các số nguyên. Nhờ Định lí cơ bản của số học, để nghiên cứu vành các số nguyên thì ta có thể xuất phát từ các số nguyên tố. Tương tự như thế để nghiên cứu vành đa thức thì ta sẽ đi nghiên cứu các đa thức bất khả quy.

Trong suốt tiết này, luôn giả thiết V là miền nguyên, tức V là vành giao hoán khác $\{0\}$ và nếu $a, b \neq 0$ là hai phần tử của V thì $ab \neq 0$. Ta có khái niệm đa thức bất khả quy trong vành đa thức $V[x]$. Chú ý rằng $V[x]$ là miền nguyên. Nội dung của tiết này được tham khảo từ tài liệu [1].

Định nghĩa 1.1.1 Cho $f(x) \in V[x]$ là đa thức khác 0 và không khả nghịch. Ta nói $f(x)$ là *bất khả quy* trên V nếu nó không có ước thực sự. Ta nói $f(x)$ *khả quy* nếu $f(x)$ có ước thực sự.

Chú ý rằng tính bất khả quy của đa thức phụ thuộc vào vành cơ sở. Chẳng hạn, đa thức $2x+6$ là bất khả quy trên trường $\mathbb{Q}$. Tuy nhiên $2x+6$ không bất khả quy trên vành $\mathbb{Z}$ bởi vì các đa thức 2 và $x+3$ đều là ước thực sự của $2x+6$. Tương tự, đa thức x^2+4 là bất khả quy trên $\mathbb{R}$ nhưng không bất khả quy trên $\mathbb{C}$.

Bổ đề 1.1.2 *Đa thức $f(x)$ là bất khả quy nếu và chỉ nếu $f(x+a)$ là bất khả quy với mọi $a \in V$.*

Vì mỗi phần tử khác 0 trong một trường đều khả nghịch, nên từ định nghĩa đa thức bất khả quy ta có kết quả sau.

Bổ đề 1.1.3 *Đa thức $f(x)$ với hệ số trên một trường K là bất khả quy nếu và chỉ nếu $\deg f(x) > 0$ và $f(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức có bậc bé hơn.*

Chú ý rằng đa thức bậc nhất với hệ số trong một trường đều có nghiệm. Vì thế ta có kết quả sau.

Bổ đề 1.1.4 *Trên một trường K, các phát biểu sau là đúng.*

i) Đa thức bậc nhất luôn bất khả quy.

ii) Đa thức bậc 2 và bậc 3 là bất khả quy nếu và chỉ nếu nó không có nghiệm trong K.

Tiếp theo chúng tôi trình bày một số phương pháp xét tính bất khả quy của đa thức trên tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$. Trước hết ta nhắc lại khái niệm đa thức nguyên bản.

Định nghĩa 1.1.5 Một đa thức khác không trong vành $\mathbb{Z}[x]$ được gọi là *nguyên bản* nếu các hệ số của nó có ước chung lớn nhất bằng 1.

Bổ đề 1.1.6 *Tích của hai đa thức nguyên bản là đa thức nguyên bản.*

Bổ đề 1.1.7 (Bổ đề Gauss). *Cho $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Giả sử $p(x) = g(x)f(x)$ với $g(x), f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Khi đó tồn tại $g_*(x), f_*(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho*

$$\deg g(x) = \deg g_*(x), \deg f(x) = \deg f_*(x) \text{ và } p(x) = g_*(x)f_*(x).$$

Đặc biệt, nếu $p(x)$ là khả quy trên $\mathbb{Q}$ thì nó phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc thấp hơn.

Chứng minh. Viết $f(x) = af_1(x)$ và $g(x) = bg_1(x)$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$ và $f_1(x), g_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$ là các đa thức nguyên bản. Khi đó $f_1(x)g_1(x)$ là đa thức nguyên bản (theo Bổ đề 1.1.6). Rõ ràng $p(x) = abf_1(x)g_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ta chứng minh $ab \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, giả sử $ab \notin \mathbb{Z}$. Khi đó $ab = \frac{r}{s}$ với $\frac{r}{s}$ là phân số tối giản và $s > 1$. Viết $f_1(x)g_1(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$. Vì $f_1(x)g_1(x)$ là nguyên bản nên $\gcd(a_n, a_{n-1}, ..., a_0) = 1$. Vì $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ nên ta có $\frac{ra_n}{s}, ..., \frac{ra_1}{s}, \frac{ra_0}{s} \in \mathbb{Z}$. Suy ra s là ước chung của $a_n, ..., a_1, a_0$, điều này là vô lí. Vậy $ab \in \mathbb{Z}$. Đặt $f_*(x) = abf_1(x)$ và $g_*(x) = g_1(x)$. Khi đó $p(x) = f_*(x)g_*(x)$ với $f_*(x), g_*(x) \in \mathbb{Z}[x]$ và $\deg f(x) = \deg f_*(x)$ và $\deg g(x) = \deg g_*(x)$. $\square$

Chú ý rằng nếu $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_0$ là đa thức với hệ số nguyên nhận phân số tối giản $\frac{p}{q}$ làm nghiệm thì p là ước của a_0 và q là ước của a_n. Đặc biệt, nếu $a_n = 1$ thì mọi nghiệm hữu tỷ của $f(x)$ đều là nghiệm nguyên.

Việc sử dụng Bổ đề Gauss để xét tính bất khả quy của đa thức trên $\mathbb{Q}$ là phương pháp hữu hiệu. Một số ví dụ minh họa cho phương pháp này chúng ta có thể xem trong tài liệu [1]. Sau đây là một số ví dụ khác.

Ví dụ 1.1.8 Chứng minh đa thức $p(x) = x^4 - x^2 + 1$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

Lời giải. Nếu $p(x)$ có nghiệm hữu tỷ thì nghiệm đó phải là nghiệm nguyên (do hệ số của số hạng cao nhất bằng 1) và là ước của số hạng tự do. Kiểm tra lần lượt các ước của 1 là $1, -1$ thấy chúng không là nghiệm của $p(x)$. Do đó $p(x)$ không có nghiệm hữu tỷ. Vì thế $p(x)$ không là tích của một đa thức bậc nhất và một đa thức bậc ba. Giả sử $p(x)$ khả quy trên $\mathbb{Q}$. Theo Bổ đề Gauss, $p(x)$ có sự phân tích $p(x) = g(x)h(x)$ trong đó $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có bậc 2 và có hệ số cao nhất bằng 1. Ta viết $g(x) = x^2 + ax + b$ và $h(x) = x^2 + cx + d$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Đồng nhất hệ số ở hai vế của đẳng thức $p(x) = g(x)h(x)$ ta được $\begin{cases} a+c=0 \\ ac+b+d=-1 \\ ad+bc=0 \\ bd=1 \end{cases}$. Vì $bd = 1$ và vai trò của b, d là như nhau nên không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết $b = d = 1$ hoặc $b = d = -1$. Nếu $b = d = 1$ thì $a + c = 0, ac = -3$. Suy ra $a^2 = 3 \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$, vô lí. Nếu $b = d = -1$ thì $a + c = 0, ac = 1$. Suy ra $a^2 = -1$, vô lí. Như vậy, đa thức $p(x)$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$. □

Ví dụ 1.1.9 Chứng minh đa thức $f(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ bất khả quy trên $\mathbb{Q}$.

Lời giải. Dễ dàng kiểm tra được $f(x)$ không có nghiệm hữu tỷ. Vì thế $f(x)$ không là tích của một đa thức bậc nhất và một đa thức bậc năm. Giả sử $f(x)$ khả quy trên $\mathbb{Q}$. Theo Bổ đề Gauss (xem Bổ đề 1.1.7), tồn tại phân tích $f(x) = g(x)h(x)$, trong đó $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ có hệ số cao nhất bằng 1 và có bậc dương. Vì $\deg f(x) = 6$ nên ta có hai trường hợp.

Trường hợp 1: $f(x) = (x^2 + ax + b)(x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + g)$, trong đó $a, b, c, d, e, g \in \mathbb{Z}$. Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} a+c=0 \\ ac+b+d=-6 \\ ad+bc+e=-6 \\ ae+bd+g=12 \\ ag+be=-36 \\ bg=1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Vì $bg = 1$ nên chỉ có thể xảy ra 2 trường hợp nhỏ sau. Với $b = 1, g = 1$,